εισαγωγή στις διαφ. εξισώσεις. No. 14 Date 28-11-19

(V) ας είναι $\{y_1, \dots, y_n\}$ β.σ.λ. με πραγμ. συναρτήσεις τότε y πραγμ. λύση $\Leftrightarrow \exists\, c_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$: $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x), x \in \mathbb{R}$

<u>**Απόδειξη:**</u>

($\Leftarrow$) ας είναι $c_1, \dots, c_n$ σταθερές τ.ω. $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$, $x \in \mathbb{R}$

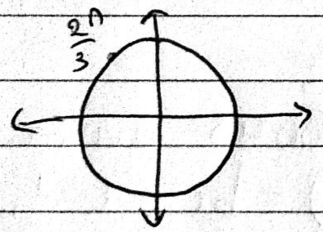
Επειδή y πραγμ $\Rightarrow \operatorname{Im} y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ επομένως

$$0 = \operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(c_i y_i(x)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{Im}) y_i(x) = \operatorname{Im} c_i = 0 \Rightarrow c_i \in \mathbb{R}.$$

$y^{(5)} + y^{(4)} + \dots + y' + y = 0$ // $\lambda^5 + \dots + \lambda + 1 = p = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}, \lambda \neq 1$

$z_1 = 1$ // $z_k = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\dfrac{2k\pi}{6}\right)$ $k = 0, \dots, 5$.



$k = 0$, $z_0 = 1$

$k = 1$, $z_1 = \cos\dfrac{2\pi}{6} + i \sin\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 2$, $z_2 = \cos\dfrac{4\pi}{6} + i \sin\dfrac{4\pi}{6}$

$= -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 3$ $z_3 = -1$

$k = 4$ $z_4 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 5.$ $z_5 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e^{-x}

$$\left\{\begin{matrix} e^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), & e^{1/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ \\ e^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), & e^{-1/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{matrix}\right\}$$

- ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ Γ.Δ.Ε $\underbrace{\alpha_n y^{(n)}+\ldots+\alpha_1 y'+\alpha_0 y}_{L(y)}=b \quad (E_n)$

$n=1$ (ΘΕΩΡΗΜΑ 11)

$$\left(\left.\begin{matrix} L(y_1)=b \\ L(y_2)=b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} L(y_1)-L(y_2)=0. \\ \Rightarrow L(y_1-y_2)=0. \end{matrix}\right)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Ας είναι y_μ μια (μερική) λύση της μη ομογ. γ.δ.ε (E_n) τότε μια συνάρτηση $y\in C^n(I)$ είναι μια λύση της (E_n) αν και μόνον αν υπάρχει $\tilde{y}_n$ λύση της (E_n^0) τέτοια ώστε

$$y=\tilde{y}+y_\mu$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Υπερθεσης: Ας είναι $y_1,\ldots,y_k$ λύσεις αντίστοιχα των (μη ομογενών) γ.δ.ε $L(y)=b_i$, $i=1,\ldots,k$ τότε η συνάρτηση $y=y_1+\ldots+y_k$ είναι λύση της $L(y)=b=b_1+\ldots+b_k$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ας είναι $\{y_1,\ldots,y_n\}$ ένα β.σ.λ της (E_n^0) αν $v_1,\ldots,v_n$ είναι τέτοια ώστε

$$\begin{cases} y_1v_1'+\ldots+y_nv_n'=0 \\ y_1'v_1'+\ldots+y_n'v_n'=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)}v_1'+\ldots+y_n^{(n-2)}v_n'=0 \\ y_1^{(n-1)}v_1'+\ldots+y_n^{(n-1)}v_n'=\frac{b}{\alpha_n} \end{cases} \quad (S)$$

τότε η συνάρτηση $y = y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$ είναι μια λύση της (E_n). Επιπλέον, η συνάρτηση

$$y(x) = \sum y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{\alpha_i(s)} ds \quad , x, x_0 \in I$$

είναι μια λύση της (E_n) που ικανοποιεί τις

$$y(x_0) = 0, \ y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Απόδειξη: Ας είναι $V_1, \dots, V_n$ συναρτήσεις που ικανοποιούν την (S) και $y = \sum_{i=1}^{n} V_i y_i$ είναι $(x \in I)$.

$\alpha_0 \quad y = y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$

$\alpha_1 \quad y' = y_1' V_1 + y_1 V_1' + \dots + y_n' V_n = (y_1' V_1 + \dots + y_n' V_n) + \cancel{(y_1 V_1' + \dots + y_n}$

$\alpha_2 \quad y'' = y_1'' V_1 + y_1' V_1' + \dots + y_n'' V_n + y_n' V_n' = y_1'' V_1 + \dots + V_n'' V_n + \underbrace{(y_1' V_1' + \dots + y_n' V_n')}_{0}$

$y^{(n-2)} = y_1^{(n-1)} V_1 + \dots + y_n^{(n-1)} V_n + (0)$

$y^{(n)} = (y_n^{(n)} V_1 + y_1^{(n-1)} V_1) + \dots + y_n^{(n)} V_n + y_n^{(n-1)}$

$= y_1^{(n)} V_1 + \dots + y_n^{(n)} V_n + (y_1^{(n-1)} V_1' + \dots + y_n^{(n-1)} V')$

$L(y) = V_1 (\alpha_1 y_1 + \alpha_1 y_1' + \dots + \alpha_n y^{(n)}$

$= V_2 (\alpha_1 y_1 + \alpha_1 y_1' + \dots + \alpha_n y_1^{(n)})$

$+ V_n (\alpha_n y_n' + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}$

$+ \alpha_1 \frac{b}{\alpha_n}$

$= 0 + b$

No. Date

$$y(x) = \sum y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_n(s)} ds \quad , x, x_0 \in I.$$

$y(x_0) = 0, \ldots, y^{(n)}(x_0) = 0.$

ικανοποιεί τις συνθήκες ↑

(*) Αν y_1 λύση της (E_n) τότε y λύση της $(E_n) \Leftrightarrow \exists \tilde{y}$ λυση της (E_n^0) $y = y_\mu + \tilde{y}$.

ΑΣΚΗΣΗ (ΑΣ σελ. 95)

$$y''' - 3y'' + 2y' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(E_0) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$
$= \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$

$\{1, e^x, e^{2x}\}$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2 \cdot e^{2x} \\ 0 & e^x & 4 \cdot e^{2x} \end{vmatrix} = 2 \cdot e^{3x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2 \cdot e^{2x} \\ 1 & e^x & 4 \cdot e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x}.$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{2x} \\ 0 & 0 & 2 \cdot e^{2x} \\ 0 & 1 & 4 \cdot e^{2x} \end{vmatrix} = 2 \cdot e^{2x}.$$

$W_3(x) = \ldots$

No. Date

$$y_4(x) = 1 \cdot \int_0^x \frac{e^{3s}}{2e^{3s}} \frac{e^s}{1} ds + e^x \cdot \int_0^x \frac{-2e^{2s}}{2\cdot e^{2s}} + e^{2x} \int_0^1 \frac{e^s}{2\cdot e^{3s}} \frac{e^s}{1} ds$$

↑ Είναι μια μερική λύση. ①

Γενική λύση: $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + y_4(x)$

όλες → $x \in \mathbb{R}$.

$$① \to \; = -1 + \frac{1}{2} \cdot e^x + \frac{1}{2} \cdot e^{2x} - x \cdot e^x.$$

ΑΣ σελ. 95 $x^2 y'' - xy' + y = x \log x$

$$\boxed{x^2 y'' - xy' + y = 0} \xrightarrow[\boxed{x>0}]{} \{x, x\log x\}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x\log x \\ 1 & \log x + 1 \end{vmatrix} = x\log x + x - x\log x.$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x\log x \\ 1 & \log x + 1 \end{vmatrix} = -x\log x$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x$$

$$y_1(x) = y_1 \int_1^x \frac{W_1}{W} \frac{b}{\alpha_2} ds + y_2 \int_1^x \frac{W_2}{W} \frac{b}{\alpha_2} ds$$

$$= x \int_1^x \frac{-s\log s}{s} \frac{s\log s}{s^2} ds + x\log x \int_1^x \frac{s}{s} \frac{s\log s}{s^2} ds$$

$$= -x \int_1^x \frac{\log^2 s}{s} + x\log x \int_1^x \frac{\log s}{s} ds.$$

No. Date

$$y_1 V_1' + y_2 V_2' = 0$$
$$y_1' V_1' + y_2' V_2' = \frac{x \log x}{x^2}$$

$$x V_1' + x \log x \, V_2' = 0$$
$$V_1' + (\log x + 1) V_2' = \frac{\log x}{x}$$

$y'' + p^2 y = b(x)$, $p(x)$, b Gwεxris Gwαpτnσn

$$y'' + p^2 y = 0.$$
$$\lambda^2 + p^2 = p(\lambda)$$
$$\lambda = \pm ip$$

$\{\cos(p(x)), \sin(p(x))\}$.

$$w_1 = \begin{vmatrix} \cos p(x) & \sin p(x) \\ -p\sin p(x) & p\cos p(x) \end{vmatrix} = p > 0$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} \cos p(x) & 0 \\ & 1 \end{vmatrix} = \cos p(x)$$

$$y(x) = \cos p(x) \int_0^x \frac{-\sin(p(t)}{p} \frac{b(t)}{1} dt + \sin p(x) \int_0^x \frac{\cos(pt)}{p} \frac{b(t)}{1} d$$

$$y(x) = \frac{1}{p} \Big\{ \int_0^x [-\cos px \sin p(x) + \sin px \cos pt] \, b(t) \, dt$$

$$= \frac{1}{p} \int_0^x \underbrace{\sin p(x-t) \, b(t)}_{k(x-t)} dt.$$

No. Date

Γ.Δ.Ε με σ.σ $L(y) = b(x)$ $\rightarrow y_\mu(x)$ πολυώνυμο.

$\rightarrow e^{\lambda(x)}(x)$

Ασκ 3 i | σελ 113

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 + 3$$

$$y(x) = \alpha x^2 + bx + c$$

$$2\alpha - 5(2\alpha x + b) + 6(\alpha x^2 + b \cdot x + c) = x^2 + 3, x \in \mathbb{R}$$

$$6\alpha x^2 + (-10\alpha + 6b)x + 2\alpha - 5b + 6c \equiv x^2 + 2$$

$$6\alpha = 1 \qquad -10a + 6b = 0$$

$$2a - 5b + 6c = 3$$

(3vii) $y^{(6)} - 3y^{(4)} = 1$

$$\boxed{y_\mu^{(4)} = -1/3} \qquad y_\mu^{(3)} = -\frac{1}{3}x$$

$$y_\mu'' = -\frac{1}{3}\frac{x^2}{2}$$

$$y_\mu' = -\frac{1}{3}\frac{x^3}{6}$$

$$y_\mu = -\frac{1}{3}\frac{x^4}{24} \qquad \{1, x, x^2, x^3, e^{\sqrt{3}y}, e^{-\sqrt{2}x}\}$$

$$\lambda^6 - 3\lambda^4 = 0$$

$$\lambda^4(\lambda^2 - 3)$$

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 \cdot e^{\sqrt{3}x} + c_6 \cdot e^{-\sqrt{2}x}$$

No. Date

$y''' + y'' + 2y = x^2 \cdot e^{-2x}$.

$y = z \cdot e^{-2x}$ //

Αντικατάσταση: $e^{-2x} z''' + 3z''(-2)e^{-2x} + 3z' \cdot 4 e^{-2x} + z(-3) \cdot e^{-2x}$

$+ z'' \cdot e^{-2x} + 2z'(-2) \cdot e^{-2x} + z \cdot 4 \cdot e^{-2x}$

$+ 2z \cdot e^{-2x} + z \cdot e^{-2x}$

$z''' - 5z'' + 8z' - 8z = x^2$

$z_{\mu}(x) = \alpha x^2 + bx + c$

Παράδειγμα 3/108.

$y'' - 2y' + y = x \cdot e^{-x} \cos 2x$.

$\{ e^x, x \cdot e^x \}$

Λύση εξ. μη ομογενούς.

$x \cdot e^{-x} (\cos tx + i \sin tx)$

$x \cdot e^{-x + itx}$

$= x \cdot e^{(-1 + it)x}$

$y = z \cdot e^{(-1+it)x}$

$z'' e + 2z'(-1 + it) e^{-} + z(-1 + it)^2 e^{-1} \ldots$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow z'' - 4(-1+i) z' - 8iz = x$

$z = \alpha x + b. \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha, b$.